

Logarithmen

Das Logarithmieren ist die Bezeichnung für ein bestimmtes Rechenverfahren das angewendet wird um Gleichungen vom Typ $a^x = b$ zu lösen. Es geht darum den Wert eines Exponenten zu bestimmen.

Die Bedeutung des Verfahrens liegt darin eine Multiplikation durch eine Addition auszudrücken $\log(xy) = \log x + \log y$ und sehr große oder sehr kleine Zahlen auf einfache und überschaubare Art und Weise darzustellen.

Hinweis

Bevor elektronische Rechenmaschinen zur Verfügung standen, nutzte man die Logarithmengesetze aus, um Multiplikationen zu Additionen und Divisionen zu Subtraktionen zu vereinfachen. Die Berechnung der Quadratwurzel vereinfacht sich auf der Ebene des Logarithmus zu einer Division durch Zwei. Die Funktionswerte wurden in Tabellenwerken, den Logarithmentafeln, erfasst und schließlich durch den Rechenschieber und später durch Taschenrechner verdrängt.

Übersicht zu den einzelnen Rechenverfahren

Rechenart	Gleichung	Basis	Exponent	Wert
Potenzieren	$2^3 = ?$	x	x	Der Wert ist gesucht
Wurzelziehen	$\sqrt[3]{8} = ?$	Die Basis ist gesucht	x	x
Logarithmieren	$\log_2 8 = ?$	x	Der Exponent ist gesucht	x

Das gesuchte Ergebnis beim Logarithmieren ist diejenige Zahl, mit der man eine Basiszahl potenzieren muss, um die vorgegebene Zahl (den Numerus) zu erhalten.

$$a^n = b \Rightarrow n = \log_a b$$

Wird ausgesprochen als Logarithmus b zur Basis a

Logarithmen die als Basiszahl 10 haben, nennt man Dekadische Logarithmen. Man schreibt ihn wie folgt. \log_{10} oder einfach nur kurz lg.

Ein weiterer oft verwendeter Logarithmus ist der natürliche. Er hat die Eulersche Zahl 2,718281828... als Basiszahl und wird \lg_e oder einfach nur kurz ln geschrieben.

Es gibt auch Logarithmen mit anderen Basiszahlen. Sie sind jedoch immer positiv, da Logarithmen nicht für negative Basiszahlen definiert sind.

Logarithmen

Es gibt aufwendige Rechenverfahren die es ermöglichen einen Logarithmus genau zu berechnen. Bevor sie jedoch entwickelt wurden gab es nur die Möglichkeit durch ausprobieren solange zu rechnen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wurde.

Um die Systematik bei Logarithmen leichter zu begreifen, ist es sinnvoll sich zunächst die Schreibweise eines Logarithmus in Bezug auf eine Potenz anzusehen, denn es ändert sich eigentlich nur die Anordnung der einzelnen Elemente.

$$\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Wert}$$

Schreibweise bei einer Potenz

$$\log_{\text{Basis}} \text{Wert} = \text{Exponent}$$

Schreibweise bei einem Logarithmus

Beispiel

Was ist der Logarithmus 7 zur Basis 2 ? Also welcher Exponent ist nötig um die Zahl 7 als Ergebnis zu erhalten, wenn die Basis die potenziert wird 2 ist ?

$$2^x = 7 \quad \text{Der Exponent } x \text{ wird gesucht... also } \lg_2 7 = ?$$

Exponent x	Ergebnis $2^x = ?$
X = 2	$2^x = 4$
X = 3	$2^x = 8$
X = 2,5	$2^x = 5,65$
X = 2,75	$2^x = 6,72$
X = 2,875	$2^x = 7,33$
X = 2,81	$2^x = 7,01$

Logarithmen

Ableitung einer Rechenregel für eine genaue Berechnung des Problems $\log_2 7 = ?$

$\log_2 7$	\Leftrightarrow	$2^x = 7$		Logarithmus 7 zur Basis 2 in die Potenzschreibweise umwandeln
10^{2^x}	=	10^7		Logarithmus aus 10 hoch 7 ist = 7 Beide Seiten der Gleichung als Potenz schreiben und gleichsetzen
$10^{\lg 2^x}$	=	$10^{\lg 7}$		Exponent als Logarithmus schreiben $\log_{\text{Basis}} \text{Wert} = \text{Exponent}$
$\lg 2^x$	=	$\lg 7$		Mit -1 potenzieren um die Basis wieder zu beseitigen
$x \lg 2$	=	$\lg 7$		Gleichung nach x umstellen
x	=	$\frac{\lg 7}{\lg 2}$		Jetzt kann x genau berechnet werden
x	=	2.807354922		

Logarithmen

Multiplizieren

Logarithmen der einzelnen Faktoren addieren.

$$\lg(u \cdot v) = \lg u + \lg v \qquad 11^{x+3} = x \lg 11 + 3 \lg 11$$

Dividieren

Logarithmus Zähler minus Logarithmus Nenner.

$$\lg \frac{u}{v} = \lg u - \lg v$$

Der Logarithmus eines Bruches ist gleich dem negativen Logarithmus seines Kehrwertes.

$$\lg \frac{u}{v} = -\lg \frac{v}{u}$$

Potenzieren

Logarithmus der Grundzahl mit dem Exponenten multiplizieren.

$$\lg u^n = n \cdot \lg u \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 20 \quad x \lg \left(\frac{1}{2}\right) = \lg 20 \quad x = \frac{\lg 20}{\lg 0,5}$$

Radizieren

Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividieren.

$$\lg \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \lg u$$

Umrechnung in andere Logarithmensysteme

$$\ln x = 2,3026 \cdot \lg x \qquad \text{Briggscher Logarithmus in natürlichen Logarithmus}$$

$$\lg x = 0,4343 \cdot \ln x \qquad \text{Natürlicher Logarithmus in Briggschen Logarithmus}$$

$$2^x = 32 \quad x = \lg_2 32 \quad \text{mit dem Taschenrechner} \quad \lg 32 / \lg 2 = 5$$

Logarithmen

Die Rechenregeln beim Logarithmieren

1. $\log_a a = 1$

2. $\log_a 1 = 0$

3. $\log_a a^n = n$

4. $\log_a \frac{1}{a^n} = -n$

5. $\log_a u * v = \log_a u + \log_a v$

6. $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

7. $\log_a \frac{1}{u} = \log_a 1 - \log_a u = -\log_a u$

8. $\log_a u^n = n * \log_a u$

9. $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} * \log_a u = \frac{\log_a u}{n}$

Dieser Text zum Thema Logarithmen wurde von Dirk Kipper angefertigt. Er darf ohne meine schriftliche Genehmigung weder vervielfältigt noch in irgendeiner anderen Form vertrieben werden. Auch ein Abdruck, selbst auszugsweise ist nur mit meiner vorherigen schriftlichen Genehmigung gestattet.

Mail: dirkkipper777@hotmail.com

Web: <http://www.dirkkipper.de/>

Dirk Kipper