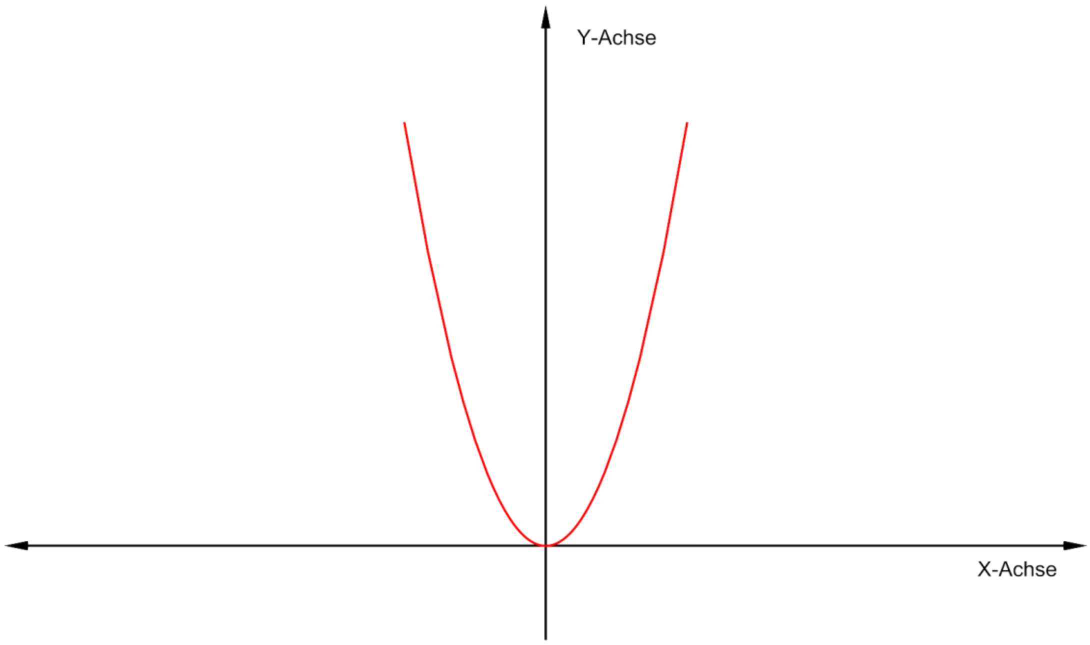
Quadratische Funktionen

Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung erkennt man daran, das ein x^2 in ihr vorkommt. Eine solche Gleichung kann mathematisch in Form einer Gleichung entweder in der Allgemeinform oder in der Scheitelpunktform ausgedrückt werden.

Die grafische Darstellung von quadratischen Funktionen

Die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion hat die Form einer Parabel. Beide Seiten von ihr sind deckungsgleich (kongruent).



Die Normalform der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$

In der linken Hälfte des Funktionsgraphen fällt der jeweilige Wert für Y, wenn der Wert für X zunehmend größer wird. Das geschieht bis ein Umkehrpunkt erreicht wird, bei dem sich der Verlauf der Kurve dann spiegelbildlich verändert. Dieser Wendepunkt wird Scheitelpunkt S genannt. Danach wird bei zunehmendem Wert für X der Wert für Y größer.

Folgt man der Funktionskurve also von links nach rechts, dann nimmt der Wert für Y stetig ab, bis der Scheitelpunkt erreicht wird. Darum spricht man auch von einem monoton fallenden Kurvenverlauf. Rechts vom Scheitelpunkt kehrt sich dieser Zusammenhang um. Die Kurve steigt stetig weiter an, sie ist monoton steigend.

Die Funktionskurve ist links des Scheitelpunktes monoton fallend.
Die Funktionskurve ist rechts des Scheitelpunktes monoton steigend.

Im Scheitel geht die Parabel vom monoton fallenden Verlauf in einen monoton steigenden Verlauf über.

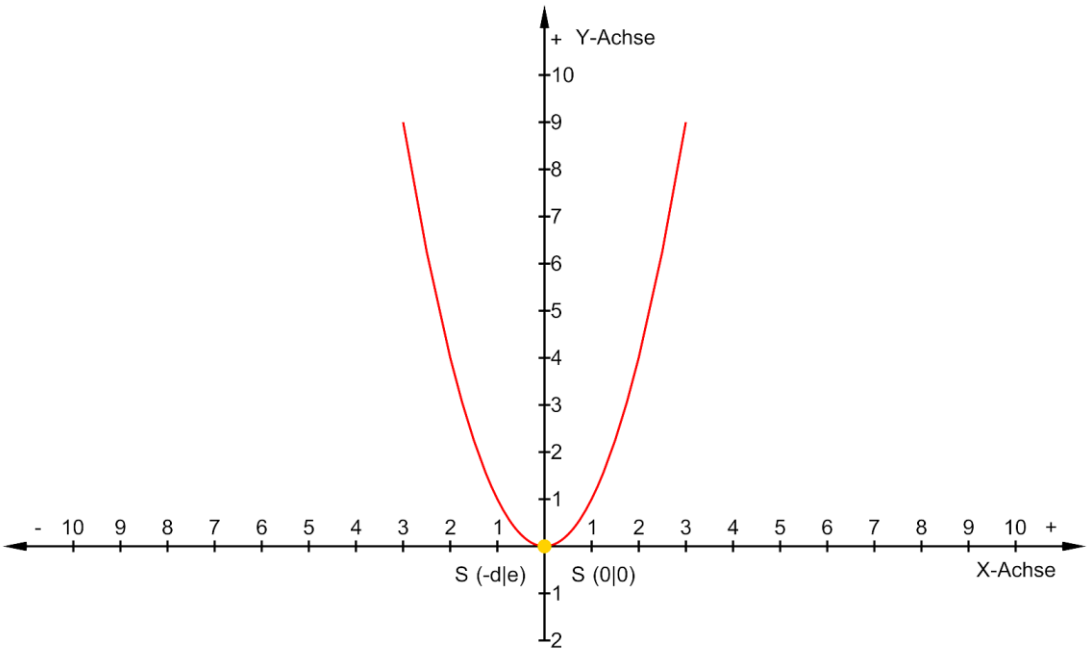
Quadratische Funktionen

<u>Scheitelpunkt allgemein</u>

Der Wendepunkt der Funktionskurve wird Scheitelpunkt genannt. Die X und Y-Koordinaten werden dabei jedoch mit d und e, anstelle von X und Y bezeichnet. Aus dem Wendepunkt P(x|y) wird so der Scheitelpunkt S(d|e) in seiner allgemeinen Form.

<u>Scheitelpunkt S bei quadratischen Gleichungen</u>

Werden Scheitelpunktkoordinaten aus einer quadratischen Gleichung entnommen, dann muss die X–Koordinate (also Faktor d) negiert werden.



Grafische Darstellung einer quadratischen Funktion

Daraus ergibt sich die folgende Schreibweise für den Scheitelpunkt S(–d|e).

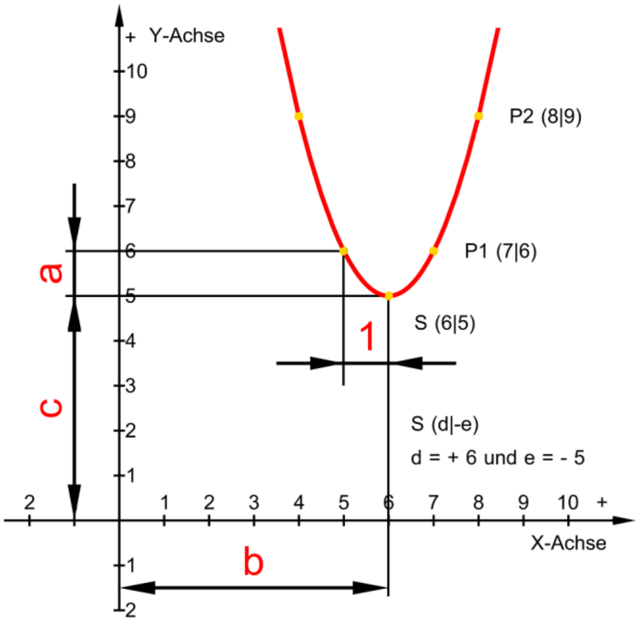
S (–d I e)	S	Scheitelpunktkoordinaten aus Scheitelpunktform
	–d	X - Koordinate des Scheitelpunktes mal –1
	e	Y - Koordinate des Scheitelpunktes

Beispiel:	f(x) = a (x + d) ² + e	I	Scheitelpunktform
	f(x) = 2 (x + 5) ² + 4	I	a = 2 ; d = + 5; e = + 4
	S (X I Y)		
	S (–d I e)	I	d = +5 x (–1) = – 5
	<u>S (–5 I +4)</u>		

Quadratische Funktionen

<u>Grafische Darstellung quadratischer Funktionen</u>

Die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion hat die Form einer Parabel.



Faktorenübersicht bei der Normalparabel $f(x)=x^2$

<u>Die Allgemeinform</u>

Zur Übersicht zunächst die einzelnen Faktoren der Allgemeinform etwas genauer.

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ Allgemeinform bei quadratischen Gleichungen

Faktor ax^2 (vor dem x^2) gibt die Spreizung einer Parabel an. Geht man vom Scheitelpunkt einer Parabel 1 Einheit auf der x-Achse zur Seite (siehe Bild), dann ist a der Abstand von Höhe des Scheitelpunkts bis zur Parabel. Ist der Faktor a positiv (+) ist die Parabel nach oben hin geöffnet, ist a negativ (–), ist sie es nach unten.

Faktor bx (vor dem x) gibt die Verschiebung auf der X-Achse an.
+ verschiebt die Parabel nach links und – nach rechts.

Der Faktor c gibt die Verschiebung auf der X-Achse an.
+ verschiebt die Parabel nach oben und – nach unten.

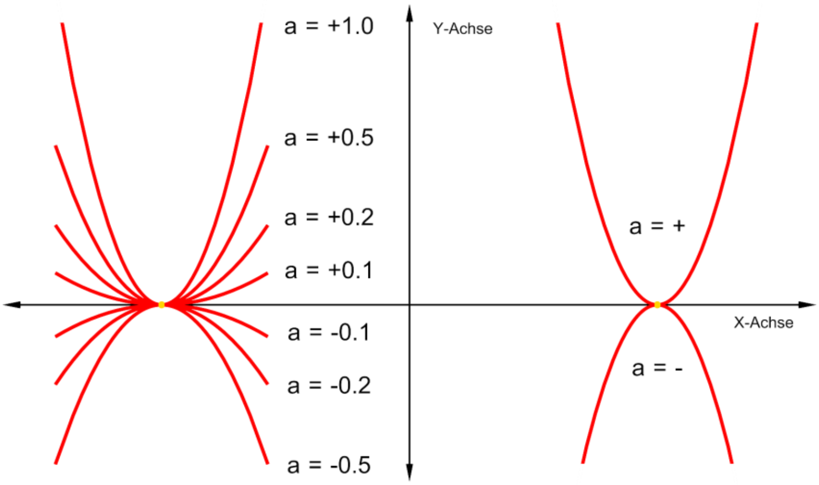
<u>Die Scheitelpuntkform</u>

Die Scheitelpunktform bei quadratischen Funktionen ist der Allgemeinform immer vorzuziehen, da man bei ihr die Scheitelpunktkoordinaten direkt ablesen kann.

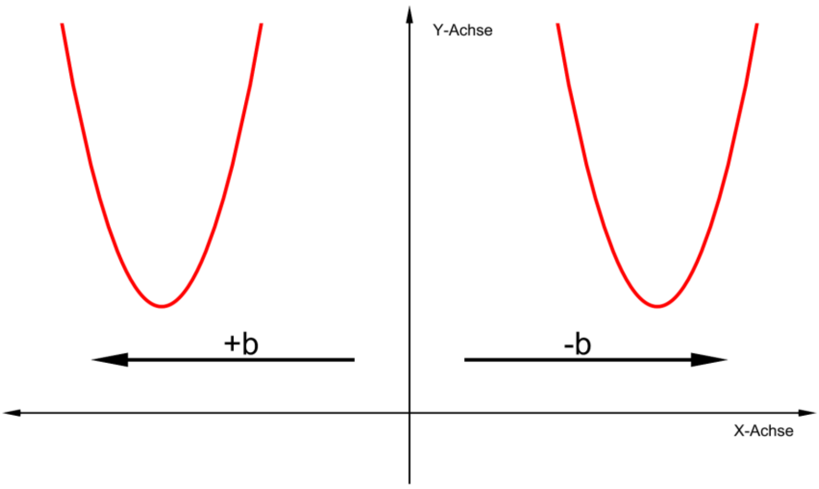
$\boxed{S\ (–d\ \mathrm{I}\ e)}$ Scheitelpunktkoordinaten S (X|Y) bzw. S (–d|e)

$\boxed{f(x) = a(x + d)^2 + e}$ Scheitelpunktform bei quadratischen Gleichungen

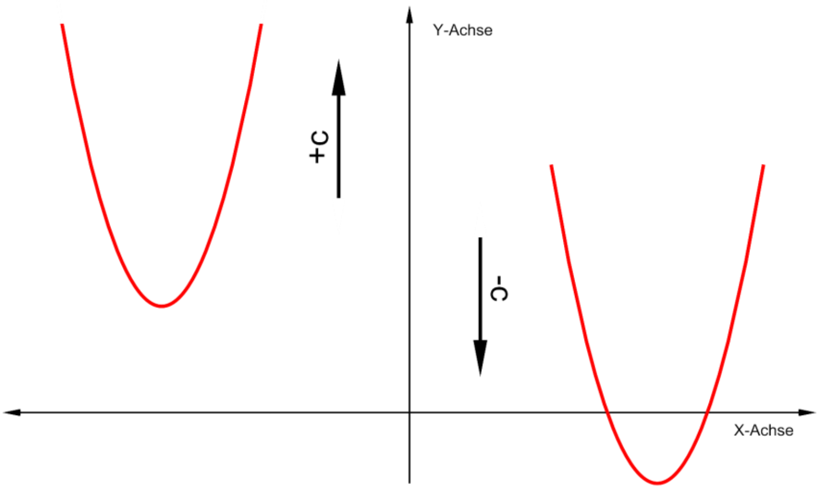
Quadratische Funktionen



Faktor a beeinflusst die Öffnungsbreite



Faktor b verschiebt die Parabel auf der x-Achse + nach links !



Faktor c verschiebt die Parabel auf der Y-Achse

Quadratische Funktionen

<u>Allgemeinform in die Scheitelpunktform umwandeln</u>
Die Allgemeinform wird erzeugt, indem man d und e der Scheitelpunktform aus den Faktoren a, b und c der Allgemeinform berechnet.

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = a(x + d)^2 + e}$

$\boxed{S\ (-d \mid e)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{d = \frac{b}{2a}}$ $\boxed{e = c - a(\frac{b}{2a})^2}$ $\boxed{a = \frac{0 - e}{(x + d)^2}}$

Beispiel:
Gegeben ist a=+1; b=+6 und c=+5 gemäß des Bildes zur Faktorenübersicht.

$$d = \frac{b}{2a}$$

$d = \frac{+6}{2(+1)} = \frac{6}{2} = 3$ | d = 3

$$e = c - a(\frac{b}{2a})^2$$

$e = +5 - [(+1)(\frac{+6}{2(+1)})]^2$ | e = –4

$f(x) = a(x + d)^2 + e$ | a = +1; d = 3; e = –4 in Scheitelpunktform einsetzen
$f(x) = +1(x + (+3))^2 + (-4)$ | Zusammenfassen, aber Vorzeichen beachten !

$f(x) = (x + 3)^2 - 4$ Scheitelpunktform

<u>Scheitelpunktform in die Allgemeinform umwandeln</u>
Die Allgemeinform wird über das Ausmultiplizieren von $(x + d)^2$ ermittelt.

$\boxed{f(x) = a(x + d)^2 + e}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$

$f(x) = (x + 3)^2 - 4$ $\Rightarrow$ (x + 3) * (x + 3) | $a^2 + 2ab + b^2$
$x^2 + 3x + 3x + 9$ | ausmultipliziert
$x^2 + 6x + 9$ | ergibt...

$f(x) = +1\ (x^2 + 6x + 9)\ -4$ | Term in die Scheitelpunktform einsetzen
$f(x) = 1x^2 + 6x + 9\ -4$ | Klammer auflösen
$f(x) = x^2 + 6x + 5$ | Zusammenfassen

$f(x) = x^2 + 6x + 5$ | Allgemeinform der Scheitelpunktform

Quadratische Funktionen

<u>PQ-Formel</u>
Mithilfe der PQ-Formel lassen sich die 2 Nullstellen einer quadratischen Gleichung berechnen. Falls eine Parabel jedoch nicht die X-Achse schneidet, dann gibt es auch keine Lösung (da es keine Schnittpunkte gibt) und die Lösungsmenge bleibt leer. Dies ist z.B. der Fall, wenn die Diskriminante negativ ist. Die Wurzel einer negativen Zahl zu ziehen ist nicht möglich, da $+^{+}$ zwar + ergibt, $-^{-}$ jedoch ebenfalls +.

$$\boxed{x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Faktor p = b und Faktor q = c der Allgemeinform !

<u>Normalisierung</u>
Um die PQ-Formel anwenden zu können, muss immer die Normalform vorliegen ! Das bedeutet, dass eine Gleichung zuerst in eine allgemeine Form umgestellt werden muss um daraus dann die Normalform zu bilden. Dieser Vorgang wird auch “Normalisierung“ genannt.

$x^2 + 16x + 50 = 5x^2 + 4x + 10$	|	Gleichung
$0 = 4x^2 - 12x - 40$	|	Allgemeine Form
$0 = x^2 - 3x - 10$	|	Normalform (Gleichung wurde normalisiert)

Beispiel:
Gegeben ist a=+1; b=+6 und c=+5 gemäß des Bildes zur Faktorenübersicht.

$x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	|	p = b = +6 q = c = +5
$x_{1/2} = -\left(\frac{6}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (+5)}$	|	Werte einsetzen
$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 - 5}$	|	Zusammenfassen
$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{-4}$	|	Diskriminante negativ, <u>keine Lösung</u>

IL={ }

<u>Schnittpunkte mit einer anderen Geraden oder Parabel</u>
Diese Fälle werden wie ein 2 x 2 Gleichungssystem behandelt und darum wie üblich über das Additionsverfahren oder per Gleichsetzungs- bzw. Einsetzungsmethode gelöst. Normalerweise gibt es zwei Lösungen, die die Schnittpunktkoordinaten repräsentieren. Bei nur einer Lösung berühren sich die Graphen lediglich. Bei keiner Lösung gibt es auch keine Schnittpunkte, die Lösungsmenge bleibt leer.

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper