

Ganzrationale Funktionen

Grundlagen zum Verständnis von ganzrationalen Funktionen

Eine ganzrationale Funktion ist ein verklausulierter mathematischer Ausdruck, mit der eine bestimmte Art von Termen in allgemeingültiger Form beschrieben werden kann.

Man kann den Begriff „ganzrationale Funktion“ jedoch nur dann erklären und auch verstehen, wenn zuvor einige weitere mathematische Begriffe näher erläutert werden. Darum folgen nun einige Definitionen bevor anschließend genauer erklärt wird, was eine ganzrationale Funktion ist.

Term

In der Mathematik bezeichnet Term einen sinnvollen Ausdruck. Er kann Ziffern (1,2,3), Variablen (a,b,c), Symbole für mathematische Verknüpfungen (+,-,*,/) und Klammern { ([]) } enthalten.

Ein Term ist z.B. der Ausdruck $2x * [2 - 3x]$, der die soeben genannten Elemente enthält.

Polynom

In der Mathematik ist ein Polynom eine Summe von Vielfachen von Potenzen mit natürlichzahligen Exponenten einer Variablen, die in den meisten Fällen mit x bezeichnet wird.

Das klingt zunächst sehr verwirrend. Darum nun ein ausführlicheres Beispiel, an dem schnell klarer wird, was der Satz eigentlich meint.

Ein Polynom ist der Ausdruck $2x^4 + 3x^5$ der wie folgt aufgebaut ist...

Einer Summe	Bsp.	a + b	also	x + x
von Vielfachen	Bsp.	2a + 3b	also	2x + 3x
von Potenzen einer Variablen x	Bsp.	2a ² + 3b ³	also	2x ⁴ + 3x ⁵
mit natürlichzahligen Exponenten	Bsp.	x ^{alle ganzen positiven Zahlen}		2x ⁴ + 3x ⁵

Koeffizienten

Koeffizienten sind eine zu einem anderen mathematischen Ausdruck beigefügte Zahl, bzw. eine Variable, die diese Zahl vertritt. Der Ausdruck ax enthält den Koeffizienten a, der nur darum so genannt wird, weil er der Variablen x beigefügt ist.

Im Beispiel $2x^4 + 3x^5$ gibt es zwei Koeffizienten. Bei der Potenz x^4 ist der Koeffizient 2 und bei der Potenz x^5 ist er 3. Der Koeffizient ist immer die Zahl, die vor der Variablen x steht.

Bei Polynomen wird der Koeffizient allgemein mit dem Buchstaben „a“ bezeichnet.

Ganzrationale Funktionen

Grundlagen zum Verständnis von ganzrationalen Funktionen

Grad

Der größte Exponent in einer Gleichung gibt ihren Grad an. Kommt in einer Gleichung als größter Exponent eine 2 vor (also wenn ein x^2 in der Gleichung vorkommt), dann spricht man von einer Gleichung zweiten Grades. Das trifft z.B. auf die Normalfunktion der quadratischen Gleichung $f(x) = x^2$ zu.

Das gleiche gilt auch für Funktionen oder Polynome. Man spricht daher auch von einer Funktion oder einem Polynom n-ten Grades. Der Buchstabe n dient hierbei als Variable für den größten Exponenten der in ihr vorkommt.

Der Polynom $2x^4 + 3x^5$ ist daher ein Polynom vom 5-ten Grad. Der größte Exponent der in ihm vorkommt hat den Wert 5, der kleinere den Wert 4.

Polynome $P(x)$ des Grades...

0 werden konstante Funktionen genannt	z. B. $P(x) = -1$
1 werden lineare Funktionen genannt	z. B. $P(x) = 3x + 5$
2 werden quadratische Funktionen genannt	z. B. $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$
3 werden kubische Funktionen genannt	z. B. $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x + 2$
4 werden quartische Funktionen genannt	z. B. $P(x) = 6x^4 - x^3 + 4x + 2$

Funktion

Eine Funktion drückt die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen aus. Traditionell werden Funktionen als Regel oder Vorschrift definiert, die eine Eingangsgröße (Argument, meist x) in eine Ausgangsgröße (Funktionswert, meist y) transformiert (überführt).

Um es einfacher auszudrücken. Es wird ein Wert $f(x)$ in Abhängigkeit zu einer anderen Größe, meist einer Formel bestimmt.

Herzlichen Glückwunsch, es ist geschafft !

Endlich kann es losgehen mit der Klärung des Begriffs „ganzrationale Funktion“.

Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktion

Eine ganzrationale Funktion ist eine Funktion, die nur eine einzige Variable (x) enthält und vom Aufbau her allgemein dem folgenden Muster gleicht. Die Mathematik bezeichnet solch einen Term als Polynom in einer Variablen x .

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}; a_i \in \mathbb{R} \text{ und } a_n \neq 0$$

Wie man sieht, ist die Funktion von links nach rechts, vom Glied x mit dem größten Exponenten, hin zum Glied x mit dem kleinsten Exponenten geordnet.

Der Buchstabe n steht für den größten Exponenten, der im Term vorkommt und gibt auch gleichzeitig den Grad der Funktion an.

Der Ausdruck $n-1$ steht für den zweitgrößten Exponenten, der im Term vorkommt.

Die Bezeichnung a_n steht für den Koeffizienten, der dem Faktor x mit dem größten Exponenten beigestellt ist.

Die Bezeichnung a_{n-1} steht für den Koeffizienten, der dem Faktor x mit dem zweitgrößten Exponenten beigestellt ist.

Die Bezeichnung a_1 steht für den Koeffizienten, der dem Faktor x ohne Exponenten beigestellt ist.

Die Variable a_0 steht für eine Zahl, die hinter allen Variablen mit x noch folgen kann.

Ein Beispiel:

$$f(x) = 4x^2 + 2x^4 + 5 + 3x \quad \text{wird zu} \quad f(x) = 2x^4 + 4x^2 + 3x + 5$$

Man ordnet also alle Variablen x nach der Größe ihres Exponenten. Der Größte kommt zuerst, danach alle kleineren in absteigender Reihenfolge. Am Ende kann dann evtl. noch eine Variable x (ohne Exponent) und eine Zahl stehen.

Alle Glieder werden ihrer Größe und Bezeichnung nach wie bei algebraischen Termen geordnet. Nicht alphabetisch, sondern ihren Exponenten nach.

Da im Beispiel der größte Exponent 4 ist, handelt es sich um eine Funktion 4-ten Grades. Da sie vom Aufbau her nur eine Variable x enthält und den allgemeinen Muster ganzrationaler Funktionen folgt, handelt es sich demnach also um eine ganzrationale Funktion 4-ten Grades.

Ganzrationale Funktionen

Wie bei Funktionsgleichungen üblich, erhält man die Nullstellen, indem man sie gleich 0 setzt.

$$f(x) = 5x^4 + 2y + 3z \quad \Rightarrow \quad 0 = 5x^4 + 2y + 3z$$

Aus einer ganzrationalen Funktion vierten Grades wird so eine algebraische Gleichung vierten Grades. Sie kann dann mithilfe des Substitutionsverfahrens bzw. mittels Polynomdivision entsprechend bearbeitet werden um die Nullstellen zu ermitteln.

Allgemein ausgedrückt sieht eine solche algebraische Gleichung wie folgt aus.

$$0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Eine ganzrationale Funktion nennt man deshalb ganzrational, weil der Faktor vor der Variablen x eine ganze Zahl ist.

Im folgenden Beispiel ist der Faktor vor der Variablen x gleich fünf.

$$f(x) = 5x^4 + 2y + 3z \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{5}{1}x^4 + 2y + 3z$$

Ist der Faktor vor der Variablen x jedoch ein Bruch, spricht man von einer gebrochen rationalen Funktion.

$$f(x) = \frac{5}{1}x^4 + 2y + 3z \quad \neq \quad f(x) = \frac{5}{3}x^4 + 2y + 3z$$

Ganzrationale Funktion
(Faktor vor x ist eine ganze Zahl)

gebrochen rationale Funktion
(Faktor vor x ist ein Bruch)

Ganzrationale Funktionen

Eine ganzrationale Funktion ist eine Funktion, die nur eine einzige Variable (x) enthält und vom Aufbau her dem angesprochenen allgemeinen Muster gleicht. Ist der Faktor vor der Variablen x eine ganze Zahl, spricht man von einer ganzrationalen Funktion, ist er jedoch nur der Bruchteil einer ganzen Zahl (ein Bruch) spricht man von einer gebrochen rationalen Funktion.

Dieser Text zum Thema ganzrationale Funktionen wurde von Dirk Kipper angefertigt. Er darf ohne meine schriftliche Genehmigung weder vervielfältigt noch in irgendeiner anderen Form vertrieben werden. Auch ein Abdruck, selbst auszugsweise ist nur mit meiner vorherigen schriftlichen Genehmigung gestattet.

Mail: dirkkipper777@hotmail.com

Web: <http://www.dirkkipper.de/>

Dirk Kipper