Nullstellen Berechnung
bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades

Ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden Gleichung:

$f(x) = x^3 – 1{,}18x^2 – 1{,}48x – 0{,}32$

Da hier eine Funktion 3.Grades vorliegt, können die Nullstellen nicht über Standardverfahren wie die PQ-Formel gelöst werden. Es kommt ein gesondertes Lösungsverfahren zum Einsatz, dass aus den 4 folgenden Schritten besteht.

1. Die Gleichung wird 0 gesetzt

2. Eine Nullstelle durch probieren suchen

3. Polynomdivision

4. PQ-Formel

1. Gleichung umwandeln

Die Funktionsgleichung wird in eine Bestimmungsgleichung umgewandelt. Dazu wird die Gleichung einfach Null gesetzt, das f(x) also durch Null ersetzt.

$f(x) = x^3 - 1{,}18x^2 - 1{,}48x - 0{,}32$ | Gleichung 0 setzen
$0 = x^3 – 1{,}18x^2 – 1{,}48x – 0{,}32$

2. Nullstelle raten

Es wird eine Nullstelle geraten. Am besten legt man sich eine Wertetabelle an und probiert mit dem Taschenrechner, ob die Gleichung die Bedingung 0 = 0 erfüllt (?).

x	0	+ 1	+ 2	– 2	– 1
y	–0,32	–1,98	0	entfällt	entfällt

$0 = x^3 – 1{,}18x^2 – 1{,}48x – 0{,}32$ | Ausgangsgleichung

$0^3 – 1{,}18(0)^2 – 1{,}48(0) – 0{,}32$ | x = 0 aus Wertetabelle einsetzen
$0 \neq – 0{,}32$ | Die Gleichung geht nicht auf !

$(+2)^3 – 1{,}18(+2)^2 – 1{,}48(+2) – 0{,}32$ | x = +2 aus Wertetabelle einsetzen
$0 = +8 – 4{,}72 – 2{,}96 – 0{,}32$ | Die Gleichung geht auf !

TIP
In den allermeisten Fällen bewegen sich die Lösungen bei kubischen Gleichungen in einem Wertebereich zwischen -3 und +3. Eine Wertetabelle sollte daher am besten bei 0 beginnen und dann mit +1,+2,+3 und -1, -2, -3 weitergeführt werden.

Nullstellen Berechnung
bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades

3. Polynomdivision

Die Polynomdivision ist der Name für ein Verfahren, das angewandt werden kann um eine Gleichung höheren Grades in eine Gleichung mit niedrigerem Grad umzuwandeln. Eine kubische Gleichung vom 3. Grad kann mit diesem Verfahren in eine quadratische Gleichung des 2. Grades überführt werden.

Als eine Nullstelle wurde durch systematisches ausprobieren der Wert +2 ermittelt. Der Wert wird nun verwendet, um den sogenannten Linearfaktor zu bilden. Der Linearfaktor ist ein Term, der benötigt wird um das eigentliche Verfahren, also die Polynomdivision durchführen zu können. Gebildet wird er wie folgt.

$\boxed{\text{Linearfaktor} = x - k_n}$	x = Variable k_n = Variable für die gefundenen Nullstelle
Linearfaktor = (x – 2)	k_n = +2 einsetzen um Linearfaktor zu bilden

Der Ausgangsterm wird nun durch den Linearfaktor dividiert. Geht das Verfahren ohne Rest auf, ist das Ergebnis eine weitere Gleichung. Sie hat jedoch einen geringeren Grad und auf sie kann dann ein Standardverfahren wie z.B. die PQ-Formel angewendet werden.

$x^3 – 1{,}18x^2 – 1{,}48x – 0{,}32$ $(x –2)$	Ausgangsterm Linearfaktor
$x^3 – 1{,}18x^2 – 1{,}48x – 0{,}32 : (x –2) = \dots ?$	Der Term der Ausgangsgleichung wird durch den Linearfaktor dividiert.
$\underline{x}^3 – 1{,}18x^2 – 1{,}48x – 0{,}32 : (\underline{x} –2) = x^2$ $: \underline{x\qquad}$ x^2	Das erste Glied x^3 wird nun durch das erste Element des Linearfaktors dividiert. Also x^3 geteilt durch x. Das Ernis,x^2 wird nun hinter das Gleichheitszeichen geschrieben.
$x^3 – 1{,}18x^2 – 1{,}48x – 0{,}32 : (x –2) = x^2$ $(x^3 – 2x^2)$	Jetzt multipliziert man das Ergebnis x^2 mit dem Linearfaktor und schreibt das Produkt unter den Ausgangterm.
$x^3 – 1{,}18x^2 – 1{,}48x – 0{,}32 : (x –2) = x^2$ $\underline{– (x^3 – 2{,}00x^2)}$ $0 + 0{,}82x^2$ (VORZEICHEN !)	Nun zieht man das Produkt $(x^3 – 2x^2)$ vom Ausgangsterm ab. Der Faktor x^3 fällt weg und es bleibt nur der Rest von + $0{,}82x^2$ übrig.

Nullstellen Berechnung
bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 1{,}18x^2 - 1{,}48x - 0{,}32 : (x - 2) = x^2 \\
\underline{-(x^3 - 2{,}00x^2)} \\
0 + 0{,}82x^2 - 1{,}48x
\end{array}
$$

Nun wird das nächste Glied runtergeholt und an das Ergebnis angefügt. Mit dieser Zeile wird weitergerechnet.

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 1{,}18x^2 - 1{,}48x - 0{,}32 : (x - 2) = x^2 \\
\underline{-(x^3 - 2{,}00x^2)} \\
0 + 0{,}82x^2 - 1{,}48x \\
: \quad \underline{\quad x \quad} \\
\quad 0{,}82x - 1{,}48x
\end{array}
$$

Nun wieder das erste Glied $0{,}82x^2$ durch das erste Element des Linearfaktors dividieren.

Es bleibt 0,82x übrig. Dieses Ergebnis wird hinter x^2 angefügt, so dass sich $x^2 + 0{,}82x$ ergibt.

Dann beginnt der Zyklus erneut und Schritt für Schritt werden so alle Elemente des Ausgangsterms aufgelöst. Wird alles richtig gemacht, bleibt kein Rest übrig. Ist dies jedoch einmal nicht der Fall, hat man meistens etwas falsch gemacht wie z.B. eine Vorzeichensünde begangen. Immer sauber arbeiten und besonders darauf achten !

Hier nun der ganze Term nach diesem Verfahren aufgelöst und zusammengezogen.

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 1{,}18x^2 - 1{,}48x - 0{,}32 : (x - 2) = x^2 + 0{,}82x + 0{,}16 \\
\underline{-(x^3 - 2{,}00x^2)} \\
0 + 0{,}82x^2 - 1{,}48x \\
\quad \underline{-(0{,}82x^2 - 1{,}64x)} \\
\qquad 0 + 0{,}16x - 0{,}32 \\
\qquad \underline{-\ (0{,}16x - 0{,}32)} \\
\qquad\quad 0 - 0
\end{array}
$$

Hat man alles richtig gemacht, ist das Ergebnis nun eine Gleichung mit niedrigerem Grad als der Ausgangsterm. Geht die Gleichung nicht auf, dann hat man einen entweder Fehler begangen oder eine falsche Nullstelle gewählt.

$x^2 + 0{,}82x + 0{,}16$

4. PQ-Formel

Alter Hut, siehe quadratische Funktionen. 0 setzen, normalisieren, p+q bestimmen.

$0 = x^2 + 0{,}82x + 0{,}16$ I p = 0,82 ; q = 0,16 ; Funktion ist normalisiert

$\boxed{x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$ I Einsetzen, ausrechnen, finito la muzika…

x1 = – 0,41 + 0,09 = –0,35 x2 = – 0,41 – 0,09 = –0,5 x3 = +2

Nullstellen Berechnung
bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades

Sollten in einer Gleichung des Grades 3 nur Faktoren mit der Variablen x vorhanden sein, dann lässt sich die Variable x einfach ausklammern und dadurch die kubische Gleichung direkt in eine quadratische Gleichung überführen.

Die erste Nullstelle ergibt sich in diesem Fall automatisch und ist immer gleich 0 ! Handelt es sich um eine Gleichung des 4. Grades und es kann x^2 ausgeklammert werden, dann ergeben sich sogar gleich 2 Nullstellen, die beide gleich 0 sind.

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 +4x$

$0 = 2x^3 + 3x^2 +4x$ — Die Funktionsgleichung erst in eine algebraische Gleichung umwandeln, also einfach Null setzen.

$0 = x\,(2x^2 + 3x +4)$ — Dann den Faktor x ausklammern

$\frac{0}{x} = 2x^2 + 3x + 4$ — Und durch x dividieren

$0 = 2x^2 + 3x +4$ $\quad x_{Null\ 1} = 0$ — Die erste Nullstelle ist immer = 0 !

Die erste Nullstelle ist also sofort gefunden. Sie liegt in so einem Fall immer bei Null ! Alle weiteren Nullstellen lassen sich dann wie gewohnt über die PQ-Formel bestimmen, was einem die im ersten Beispiel aufwendig durchgeführte Polynomdivision erspart.

$0 = 2x^2 + 3x +4$ — Die Funktion zuerst normalisieren !

$0 = x^2 + 1{,}5x +2$ — $p = +1{,}5\ ;\ q = +2$

$$\boxed{x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$ PQ - Formel

$$x_{1/2} = -\left(\frac{+1{,}5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{+1{,}5}{2}\right)^2 - (+2)}$$ Werte einsetzen und Abfahrt…

$$x_{1/2} = -0{,}75 \pm \sqrt{-1{,}4375}$$ Diskriminante negativ, keine Lösung !

$x_{Null\ 1} = 0$ $\quad x_{Null\ 2}$ = keine Lösung $\quad x_{Null\ 3}$ = keine Lösung

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper