

Nullstellen Berechnung per Substitutionsverfahren (Ein Sonderfall ganzrationaler Funktionen liegt vor)

Ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden Gleichung:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

Da eine biquadratische Funktion vorliegt (Gleichung des 4. Grades), deren ungerade Glieder nicht vorhanden sind, ist die Bestimmung der Nullstellen über das sogenannte Substitutionsverfahren möglich. Hierbei wird eine Hilfsvariable eingeführt um die Variable x zu ersetzen.

Dieser Vorgang wird in der Mathematik auch Substitution genannt und bedeutet lediglich, dass eine Variable durch eine andere ersetzt wird.

$$f(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 \quad \text{Ein Spezialfall einer biquadratischen Funktion liegt vor !}$$

Durch das Ersetzen von x^4 durch eine Hilfsvariable u^2 , entsteht so aus der Gleichung des 4. Grades eine quadratische Gleichung vom 2. Grad. Mit der PQ-Formel können dann für u^2 , zwei Lösungen (u_1 und u_2) bestimmt werden. Aus diesen beiden Lösungen werden dann mittels Rücksubstitution wiederum 2 weitere Lösungen ermittelt. Auf diese Weise erhält man so insgesamt 4 Lösungen.

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

1. Schritt

Die Funktionsgleichung $f(x)$ in eine algebraische Gleichung in der Nullform überführen.

$$0 = x^4 - 5x^2 + 4$$

2. Schritt

Für x^2 Hilfsvariable u einführen $x^2 = u$ (Substitution)

$$0 = u^2 - 5u + 4$$

3. Schritt

Gleichung normalisieren (Ist bereits normalisiert)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Allgemeinform der quadratischen Funktion

$$x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Faktor $p = b$ und Faktor $q = c$ der Allgemeinform !

$$0 = u^2 - 5u + 4$$

4. Schritt

Lösungen per PQ-Formel berechnen $p = -5$; $q = +4$

Nullstellen Berechnung per Substitutionsverfahren (Ein Sonderfall ganzrationaler Funktionen liegt vor)

$$u_{1/2} = -\left(\frac{-5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - (+4)}$$

$$u_{1/2} = 2,5 \pm 1,5$$

$$u_1 = +1$$

$$u_2 = +4$$

Beide Lösungen für u_1 und u_2 haben einen positiven Wert, deshalb kann man bei der Rücksubstitution in beiden Fällen die Wurzel ziehen und erhält so 4 Nullstellen (Lösungen) für die Ausgangsfunktion.

Wäre eine oder beide Lösungen der „Ersatzgleichung“ mit der Hilfsvariablen negativ gewesen, dann bekäme man für die Ausgangsfunktion entsprechend nur 2 bzw. keine Lösungen, da sich aus einer negativen Zahl keine Wurzel ziehen lässt.

$$u_1 = +1$$

$$u_2 = +4$$

5. Schritt

Lösungen u_1 und u_2 rücksostituieren $u = x^2$

$$u_1 = x^2$$

\Rightarrow

$$x^2 = +1$$

$$x = \sqrt{+1}$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{+1}$$

$$x_1 = +1$$

$$x_2 = -1$$

$$u_2 = x^2$$

\Rightarrow

$$x^2 = +4$$

$$x = \sqrt{+4}$$

$$x_{3/4} = \pm \sqrt{+4}$$

$$x_3 = +2$$

$$x_4 = -2$$

Dieses Konzept der Substitution kann ebenfalls angewendet werden, wenn die Variable x nur in 2 Potenzen auftritt. Allerdings muss dann der größere Exponent das Doppelte des kleineren Exponenten haben um eine Substitution zu ermöglichen.

Beispiele:

$$f(x) = 2x^6 - 3x^3 - 4$$

$$\text{Hilfsvariable } u = x^3$$

$$f(x) = 5x^8 + 6x^4 + 7$$

$$\text{Hilfsvariable } u = x^4$$

$$f(x) = -8x^{10} + 9x^5 + 10$$

$$\text{Hilfsvariable } u = x^5$$

$$f(x) = x^{2n} + x^n$$

$$\text{Hilfsvariable } u = x^n$$

Dieser Text zum Thema Nullstellenberechnung bei ganzrationalen Funktionen per Substitutionsverfahren wurde von Dirk Kipper angefertigt. Er darf ohne meine schriftliche Genehmigung weder vervielfältigt noch in irgendeiner anderen Form vertrieben werden. Auch ein Abdruck, selbst auszugsweise ist nur mit meiner vorherigen schriftlichen Genehmigung gestattet.

Mail: dirkkipper777@hotmail.com

Web: <http://www.dirkkipper.de/>

Dirk Kipper