Beispielaufgabe einer Kurvendiskussion

Bei einer vollständigen Kurvendiskussion werden folgende Punkte untersucht. Im Einzelnen hat sich dabei folgende Vorgehensweise bewährt…

1. Bildung aller Ableitungen der Ausgangsfunktion

2. Untersuchung der Symmetrieeigenschaften
   x^2 – Achsensymmetrisch (n tritt nur in geraden Potenzen auf)
   x^3 – Punktsymmetrisch (n tritt nur in ungeraden Potenzen auf und $a_0 = 0$)

3. Bestimmung des Globalverhaltens
   Betrachtung des dominanten Faktors der Ausgangsfunktion.
   (Leitkoeffizient a_n + Exponent n I gerade-ungerade sowie positiv-negativ)

4. Berechnung der Nullstellen
   Vorgehen nach dem allgemeinen Lösungsschema von Bernd Kaudewitz.

5. Bestimmung von Extremstellen

   a. 1 Ableitung Null setzen und die zugehörigen Nullstellen bestimmen.

   b. Die Nullstellen der 1 Ableitung in die 2 Ableitung einsetzen. Das Ergebnis der 2 Ableitung zeigt dann um welche Art von Extremstelle es sich handelt.

      $f'(x_H) = 0 \wedge f''(x_H) < 0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt

      $f'(x_T) = 0 \wedge f''(x_T) > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt

      $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0 \quad \Rightarrow$ Wendepunkt

      $f'(x_S) = 0 \wedge f''(x_S) = 0 \wedge f'''(x_S) \neq 0 \quad \Rightarrow$ Sattelpunkt

   c. Y–Koordinate für jede gefundene Extremstelle berechnen. Also X der Extremstelle in Ausgangsfunktion einsetzen und Y–Koordinate berechnen.

6. Zeichnen des Graphen der Funktion
   Gefundene Punkte in ein Koordinatensystem eintragen und verbinden.

7. Hoffen das alles stimmt !

Beispielaufgabe einer Kurvendiskussion

Geg: $f(x) = 0{,}25\,x^4 + x^3$
Ges: Kurvendiskussion

1. Bildung aller Ableitungen der Ausgangsfunktion

$$f(x) = 0{,}25\,x^4 + x^3$$

$f'(x) = x^3 + 3x^2$	I	1. Ableitung
$f''(x) = 3x^2 + 6x$	I	2. Ableitung
$f'''(x) = 6x + 6$	I	3. Ableitung
$f''''(x) = 6$	I	4. Ableitung

2. Untersuchung der Symmetrieeigenschaften

$$f(x) = 0{,}25\,x^4 + x^3$$

Leitkoeffizient a_n= 0,25 positiv
Größter Exponent n = 4 positiv, gerade

Exponenten sowohl gerade als auch ungerade, keine Standardsymmetrie !

3. Bestimmung des Globalverhaltens

$$f(x) = 0{,}25\,x^4 + x^3$$

Leitkoeffizient a_n= 0,25 positiv
Größter Exponent n = 4 positiv, gerade

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \to +\infty$ (Läuft also bei beiden Seiten zu + unendlich)

Beispielaufgabe einer Kurvendiskussion

4. Berechnung der Nullstellen

$f(x) = 0{,}25\,x^4 + x^3$ | Kleinster Faktor x^3 ausklammerbar
$f(x) = x^3(0{,}25\,x + 1)$ | Die Nullstellen 1 bis 3 liegen alle bei 0

$x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 0$; $x_{N3} = 0$

$f(x) = 0{,}25\,x + 1$ | Normalform von linearen Gleichungen

$f(x) = mx + b$ | Nach x umstellen und Nullstelle 4 berechnen

$$x = \frac{y - b}{m}$$

$$x = \frac{0 - (+1)}{0{,}25}$$

$x_{N4} = -4$

5. Berechnung der Extremstellen

a. 1 Ableitung Null setzen und die zugehörigen Nullstellen bestimmen.

$f'(x) = x^3 + 3x^2$ | Standardverfahren versagen
$0 = x^3 + 3x^2$ | Linearfaktor abspalten und Polynomdivision

Linearfaktor $= x - x_{E1}$ | Durch probieren Nullstelle suchen $x_{E1} = -3$
Linearfaktor $= x+3$

$x^3 + 3x^2 : (x+3) = x^2$ | Ersten Faktor durch das erste Element….
$-\ \underline{(x^3 + 3x^2)}$ | Polynomdivision geht auf, Nullstelle stimmt
/

$x_{E1} = -3$

Das Ergebnis der Polynomdivision ist x^2, die Normalform quadratischer Gleichungen die im Ursprung liegt. Also gibt es nur eine zweite Nullstelle im Punkt P(0I0).

$x_{E2} = 0$; $x_{E3} = 0$

Beispielaufgabe einer Kurvendiskussion

<u>b. Nullstellen der 1 Ableitung in die 2 Ableitung einsetzen und Ergebnis prüfen</u>

$f(x) = 0{,}25\ x^4 + x^3$

$f'(x) = x^3 + 3x^2$	I	1. Ableitung
$f''(x) = 3x^2 + 6x$	I	2. Ableitung
$f'''(x) = 6x + 6$	I	3. Ableitung

$x_{E1} = -3$; $x_{E2} = 0$; $x_{E3} = 0$	I	Nullstellen der 1. Ableitung

$f'(x_H) = 0 \wedge f''(x_H) < 0$	$\Rightarrow$	Hochpunkt
$f'(x_T) = 0 \wedge f''(x_T) > 0$	$\Rightarrow$	Tiefpunkt
$f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$	$\Rightarrow$	Wendepunkt
$f'(x_S) = 0 \wedge f''(x_S) = 0 \wedge f'''(x_S) \neq 0$	$\Rightarrow$	Sattelpunkt

$f''(x) = 3(-3)^2 + 6(-3)$	I	Nullstelle $x_{E1} = -3$ der 1. Ableitung einsetzen
$f''(x) = 27 + 18 = 45$	I	Ergebnis prüfen, es ist größer Null
$f''(x) = 45$		Größer Null bedeutet es ist ein Tiefpunkt

$f''(x) = 3(0)^2 + 6(0)$	I	Nullstelle $x_{E2} = 0$ der 1. Ableitung einsetzen
$f''(x) = 0$	I	Ergebnis prüfen, es ist Null

Ergebnis ist weder kleiner noch größer Null, d.h. es liegt kein Hoch- oder Tiefpunkt vor. Es kann sich darum also nur um einen Wende- oder Sattelpunkt handeln.

$f'''(x) = 6x + 6$	I	3. Ableitung
$f'''(x) = 6(0) + 6$	I	Nullstelle $x_{E2} = 0$ der 1. Ableitung einsetzen
$f'''(x) = 6$	I	Ergebnis prüfen, es ist ungleich 0

Da zwar sämtliche Bedingungen für einen Wendepunkt erfüllt sind, bleibt noch zu prüfen ob auch die Bedingungen für einen Sattelpunkt erfüllt werden. Das trifft zu. Erste und zweite Ableitung sind Null, die dritte Ableitung ist ungleich 0, es liegt somit ein Sattelpunkt vor.

Beispielaufgabe einer Kurvendiskussion

c. Berechnung der Y-Koordinaten der Extremstellen

$f(x) = 0{,}25\ x^4 + x^3$

$x_{E1} = -3$; $x_{E2} = 0$; $x_{E3} = 0$ | Nullstellen der 1. Ableitung

$f(x) = 0{,}25\ (-3)^4 + (-3)^3$ | Nullstelle $x_{E1} = -3$ einsetzen

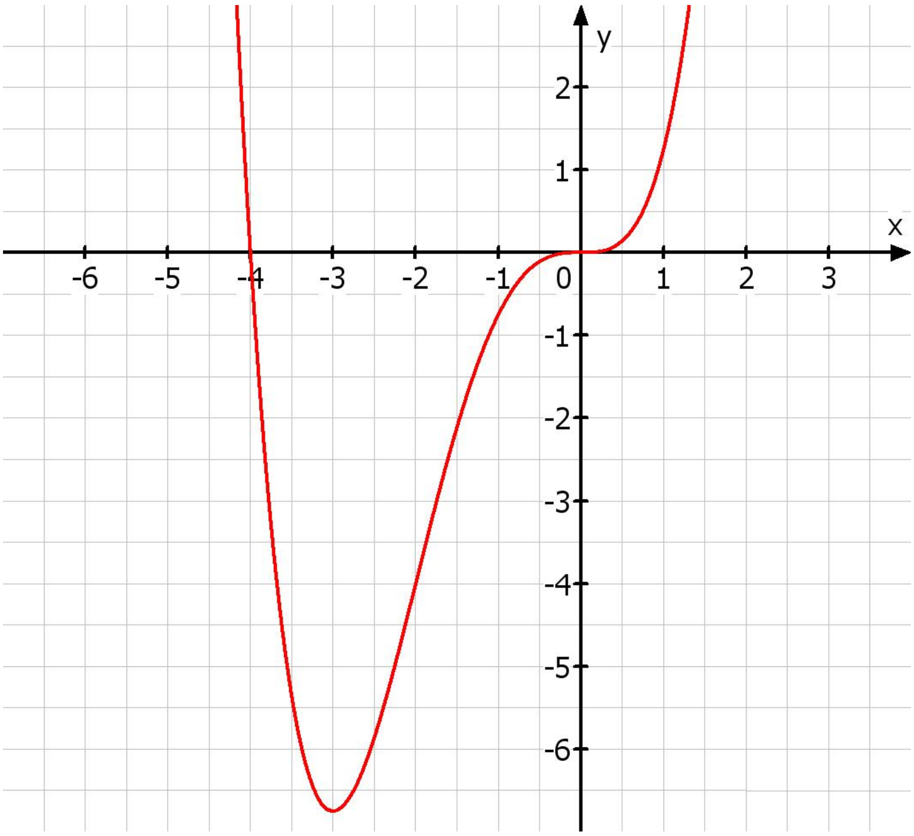
$f(x) = 20{,}25 - 27$

$f(x) = -6{,}75$ — $P_{Tiefpunkt}$ (–3 I –6,75)

$f(x) = 0{,}25\ (0)^4 + (0)^3$ | Nullstelle $x_{E2/3} = 0$ einsetzen

$f(x) = 0$ — $P_{Sattelpunkt}$ (0 I 0)

6. Zeichnen des Graphen der Funktion



$f(x) = 0{,}25\ x^4 + x^3$

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper