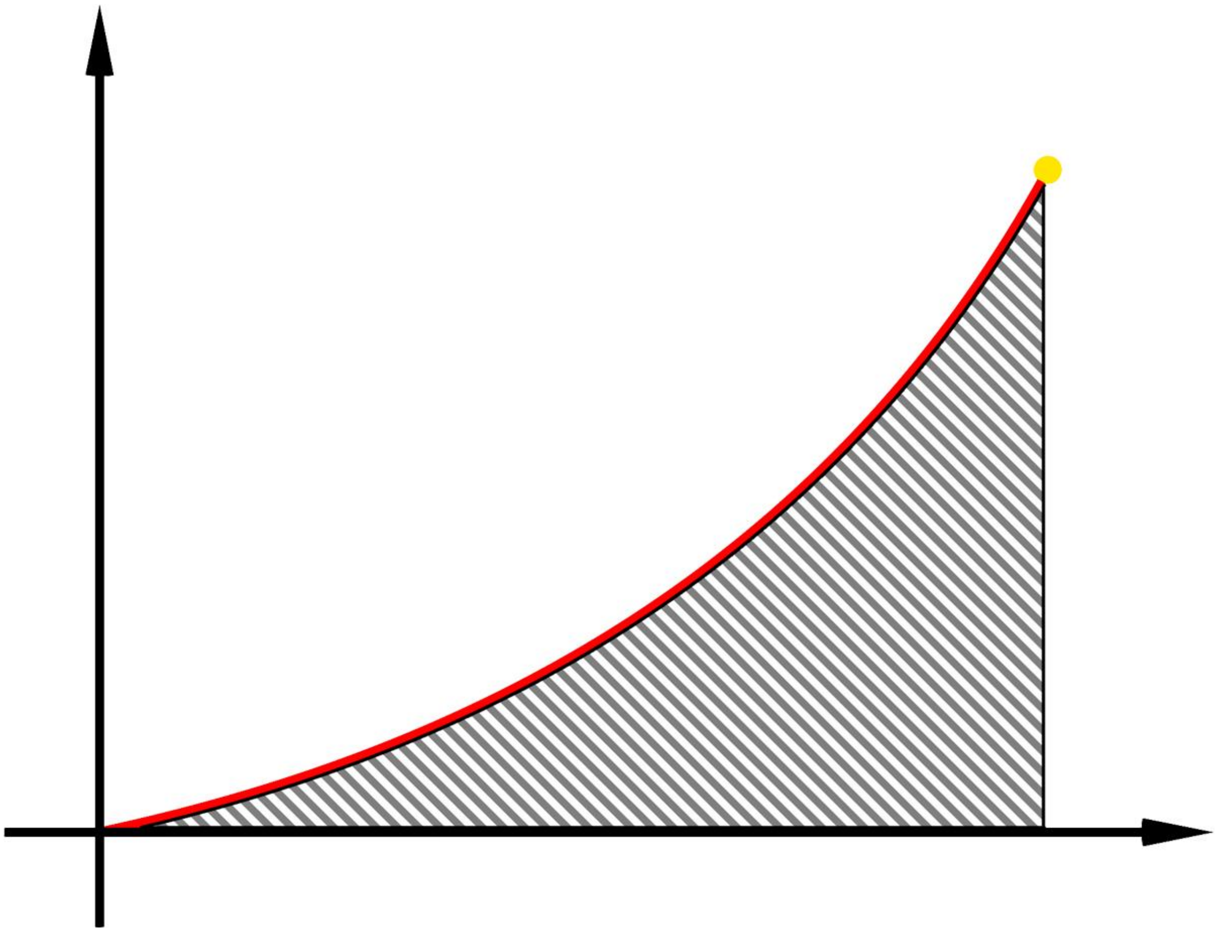
Integralrechnung

Bei der Integralrechnung geht es darum, Flächen- und Volumeninhalte zu bestimmen, deren Form durch stetige Funktionskurven bestimmt werden.



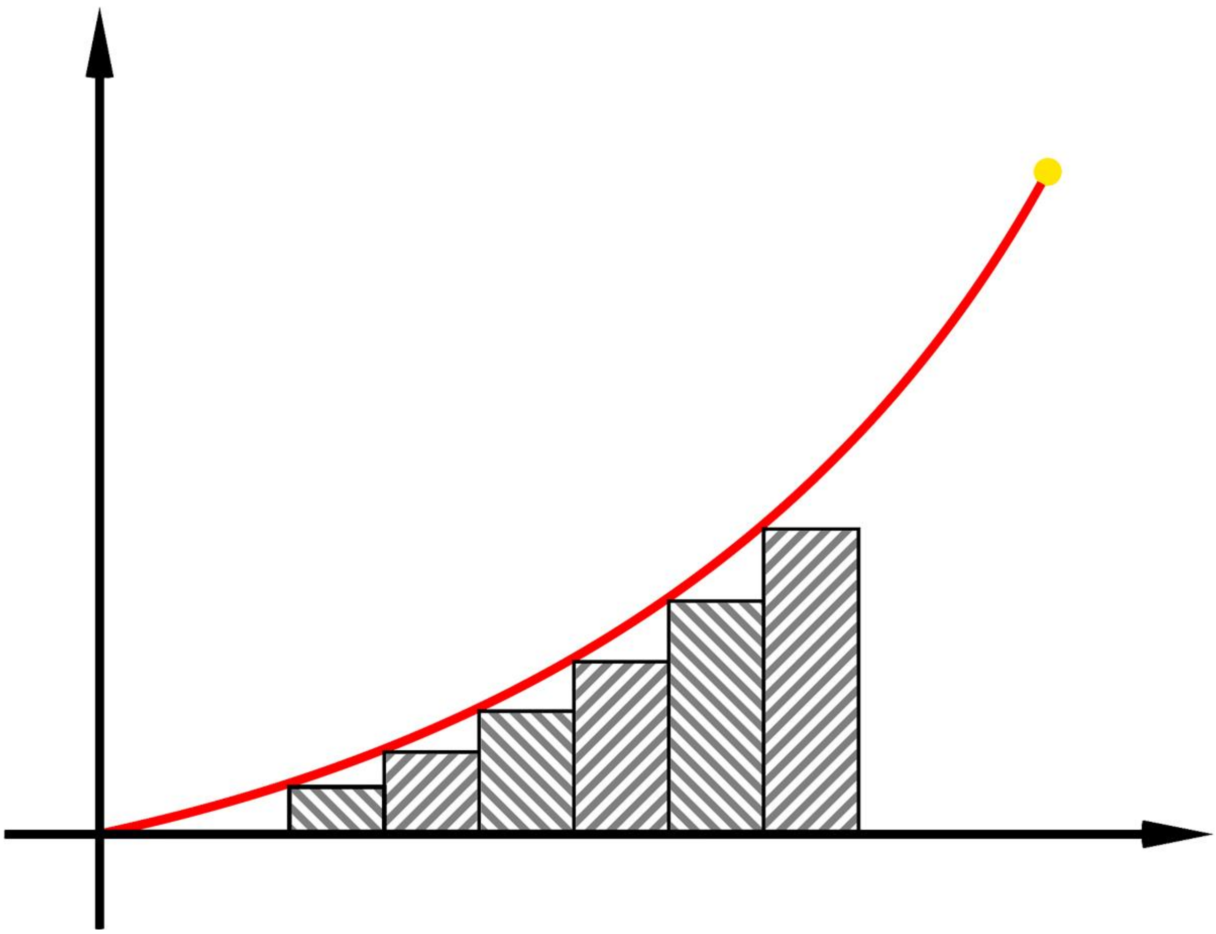
Integralrechnung
Wie groß ist die Fläche unterhalb des Funktionsgraphen ?

Stetige Funktionen sind solche, deren Funktionsgraph sich ohne Absetzen zeichnen lässt. Sie haben also weder Sprünge noch Knicke in ihrem Verlauf. Ein Beispiel für eine stetige Funktion ist z.B. die Form der Normalparabel. Sie lässt sich ohne abzusetzen oder anzuhalten in einem Zug zeichnen. Man sagt auch sie ist stetig.

Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr.) war der Erste, der ein Verfahren erfand, um den exakten Flächeninhalt eines Parabelsegmentes genau zu berechnen. Da sein Verfahren grundlegend für das Verständnis von Differential- und Integralrechnung ist soll seine Grundidee hier kurz nachvollzogen werden.

Integralrechnung

Das von ihm entwickelte Verfahren wird auch die Streifenmethode genannt. Hierbei wird die Fläche unter einem Graphen in einzelne Streifen zerteilt.



Die Streifenmethode
Die Fläche unterhalb eines Funktionsgraphen wird in einzelne Streifen unterteilt

Die Flächeninhalte der einzelne Streifen lassen sich dann wie gewöhnliche Rechtecke berechnen. Addiert man nun den Flächeninhalt aller Streifen, erhält man den ungefähren Flächeninhalt unterhalb der Funktionskurve.

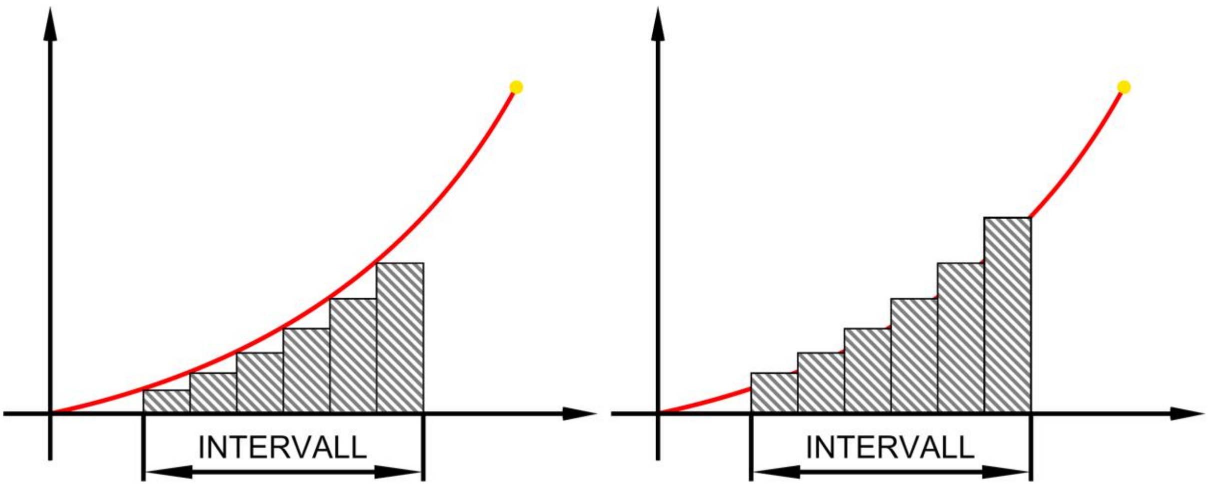
Erhöht man die Anzahl der Streifensegmente unterhalb des Graphen, dann lässt sich der Flächeninhalt immer genauer berechnen. Je nach gewünschter Genauigkeit braucht man also eine entsprechende Anzahl von Streifen. Je mehr, desto genauer !

Integralrechnung

Die Streifenmethode liefert zwar eine Möglichkeit Flächeninhalte unterhalb eines Funktionsgraphen zu berechnen, die Genauigkeit kann jedoch weiter gesteigert werden indem man den gesuchten Flächeninhalt weiter eingrenzt.

Dies geschieht indem man einmal der Flächeninhalt aller Streifen innerhalb eines bestimmten Intervalls unterhalb des Funktionsgraphen berechnet (Untersumme) und ein weiteres mal den Flächeninhalt der Streifen oberhalb des Graphen (Obersumme). Der tatsächliche gesuchte Flächeninhalt liegt dann irgendwo zwischen beiden Flächeninhalten.

Der Flächeninhalt aller Streifen oberhalb des Graphen wird Obersumme genannt.
Der Flächeninhalt aller Streifen unterhalb des Graphen wird Untersumme genannt.



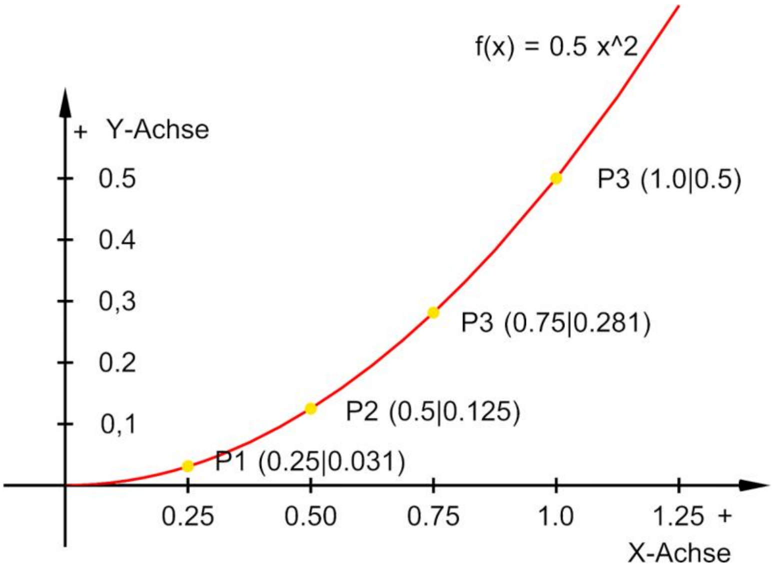
Untersumme (links) und Obersumme (rechts)

<u>Es ergibt sich daraus also folgender Zusammenhang:</u>

Die Untersumme ist kleiner als der tatsächliche Flächeninhalt, die Obersumme ist dagegen größer als der tatsächliche Flächeninhalt. Der exakte Flächeninhalt liegt irgendwo zwischen diesen beiden Flächeninhalten. Hieraus ergibt sich…

$$\boxed{\text{Untersumme} < \text{Flächeninhalt} < \text{Obersumme}}$$

Integralrechnung



$$f_{(x)} = \frac{1}{2}x^2$$

Beispiel:
Berechnen sie den Flächeninhalt der gegebenen Funktion unterhalb des Funktionsgraphen im Intervall zwischen 0 und 1. Bilden sie die Ober- und Untersumme jeweils aus 4 Streifen.

Die Fläche eines Streifens ist Streifenbreite mal Höhe des Streifens. Es ergibt sich…

$$U_4 = \frac{1-0}{4} * [(0.5*(0)^2) + (0.5*(0.31)^2 + (0.5*(0.281)^2 + (0.5*(0.5)^2 +)]$$

$$U_4 = \frac{1}{4} * (0 + 0.03125 + 0.125 + 0.28125)$$

$$U_4 = 0.109375$$

$$O_4 = \frac{1-0}{4} * [(0.5*(0.31)^2 + (0.5*(0.281)^2 + (0.5*(0.5)^2 + (0.5*(1.0)^2)]$$

$$O_4 = \frac{1}{4} * (0.03125 + 0.125 + 0.28125 + 0.5)$$

$$O_4 = 0.234375$$

$$0.109375 \leq \ A \ \leq \ 0.234375$$

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper