Integralrechnung

Beispiel einer Integralrechnung
Bei der Integralrechnung geht es um die Berechnung von Flächeninhalten, die sich zwischen der Funktionskurve und der X-Achse innerhalb eines bestimmten Intervalls befinden. Nachdem nun die Grundlagen erläutert wurden, soll hier natürlich auch ein ausführliches Beispiel einer Integralrechnung folgen. Sie erfolgt in mehreren Schritten und ganz ausführlich, damit alles nachvollziehbar bleibt.

Ausgangsfunktion f(x) (Die ursprüngliche Funktion)
Zunächst schreibt man die Ausgangsfunktion mit Angabe des Intervalls auf.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 5 \qquad I=[1;2] \qquad | \qquad I = \text{Intervall}$$

Stammfunktion F(x) (Aufleitung der Ausgangsfunktion)
Dann wird die ursprüngliche Ausgangsfunktion aufgeleitet. Man nennt diesen Vorgang auch das „Bilden der Stammfunktion“. Die Stammfunktion ist für die spätere Berechnung des Flächeninhaltes des Integrals unverzichtbar !

Ist das Integral entweder ein unbestimmtes Integral (Integral bei dem kein Intervall angegeben ist) oder handelt es sich um eine Stammfunktion F(x), so wird ganz allgemein immer noch der unbestimmter Faktor c hinzuaddiert, um dies kenntlich zu machen.

$$\int (x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 5)\, dx + c \qquad | \qquad \text{Unbestimmtes Integral}$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 5x + c \qquad | \qquad \text{Stammfunktion}$$

Bildung des Integrals
Nun wird aus dem unbestimmten Integral das bestimmte Integral gebildet. Dies geschieht, indem im Integrand der obere (2) und untere Wert (1) des Intervall I=[1;2] angegeben wird. Es folgt die Ausgangsfunktion in einer Klammer, sowie der Angabe nach der Klammer, ob das Differential von d (dx) oder a (ax) gebildet werden soll.

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 5)\, dx$$

Anmerkung:
Da das Integral jetzt bestimmt ist (durch die Angabe des Intervalls) fällt auch der unbestimmte Faktor c wieder weg !

Integralrechnung

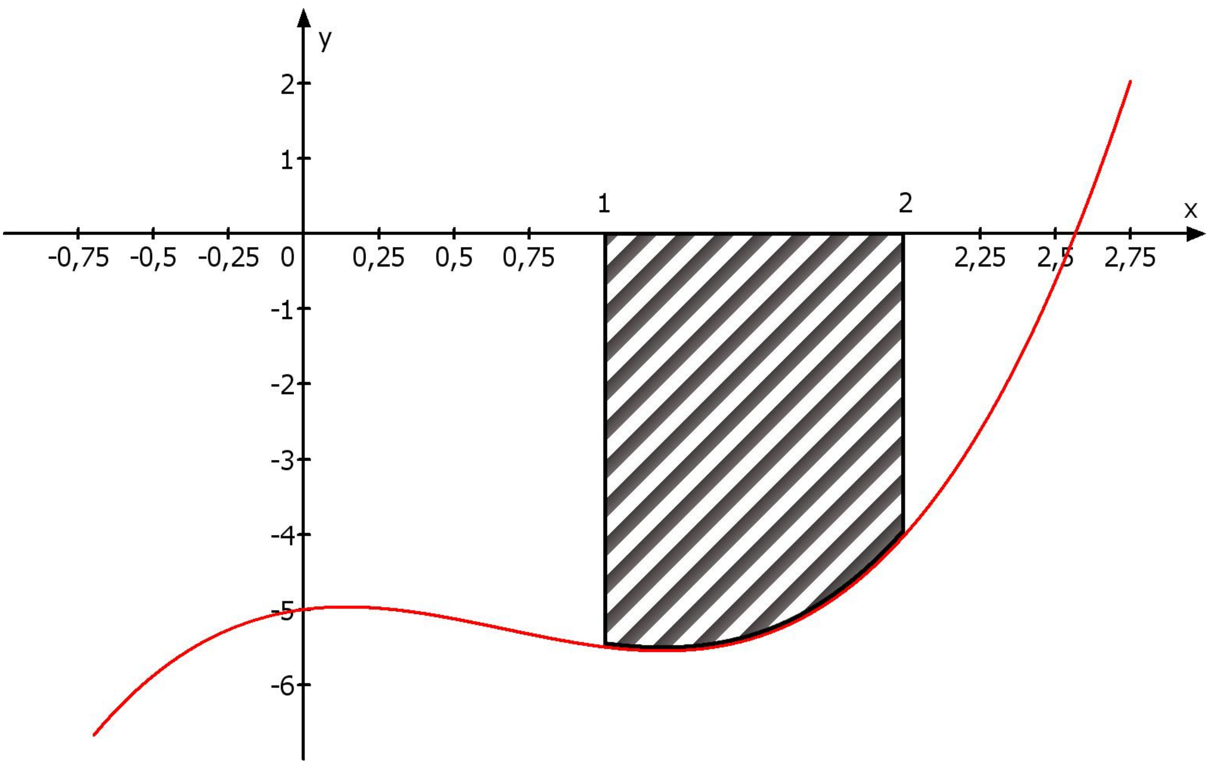
Integralrechnung
Nun kann das Integral, also der gesuchte Flächeninhalt mithilfe der Stammfunktion berechnet werden. Das Ergebnis für den Flächeninhalt ist die Differenz, die sich nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wie folgt ergibt.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{Flächeninhalt (b)} - \text{Flächeninhalt (a)}}$$

Auf deutsch…
Man nimmt die Stammfunktion und trägt für x den oberen Wert des Intervalls ein minus der Stammfunktion, wo für x der untere Wert des Intervalls eingetragen ist. Das Ergebnis ist eine Differenz. Sie entspricht dem Flächeninhalt A zwischen dem Funktionsgraphen und der X-Achse, in dem entsprechenden Intervall. Also…

$$A = [F(x) \text{ mit } x = \text{oberer Intervallwert}] - [F(x) \text{ mit } x = \text{unterer Intervallwert}]$$

Ist man sich nicht sicher wie der Funktionsgraph verläuft, so hilft eine Skizze weiter. Damit lassen sich wesentlich einfacher die Lage der gesuchten Flächeninhalte bestimmen. Hier ist die Ausgangsfunktion und schraffiert die gesuchte Fläche.



Grafische Darstellung der Funktion f(x) = x^3-2*x^2+0,5

Integralrechnung

Beispiel einer Integralrechnung
Bei der eigentlichen Berechnung schreibt man am besten das bestimmte Integral sowie die Stammfunktion nebeneinander. So ist es viel übersichtlicher und die Berechnung wird dadurch etwas einfacher.

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2} x\text{-}5)\, dx = [\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 - 5x]_1^2$$

$$A = [\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{6}(2)^3 + \frac{1}{4}(2)^2 - 5(2)] - [\frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{6}(1)^3 + \frac{1}{4}(1)^2 - 5(1)]$$

$$A = [4 - 1{,}333 + 1 - 10] - [0{,}25 - 0{,}166 + 0{,}25 - 5]$$

$$A = [-6{,}333] - [-4{,}666]$$

$$A = -1{,}666$$

Fazit:
Das Ergebnis ist negativ. Eine Fläche kann jedoch keinen negativen Flächeninhalt haben ! Das Vorzeichen zeigt hier an, dass sich die Fläche unterhalb der X-Achse befindet. Wäre das Ergebnis jedoch positiv, läge der Graph oberhalb der X-Achse. Darum auch die Empfehlung immer eine Skizze zu zeichnen. So sieht man es auf den ersten Blick.

Kurze Zusammenfassung:

1. Ausgangsfunktion aufschreiben

2. Stammfunktion bilden
   Aufleitung von der Ausgangsfunktion bilden

3. Falls möglich den Funktionsgraphen skizzieren oder schnell per Plotter

3. Den gesuchten Flächeninhalt bestimmen
   A = F(x) b – F(x) a
   In die Stammfunktion einmal den oberen (b) und einmal den unteren (a) Intervallwert eintragen und die Differenz zwischen dem Ergebnis mit dem oberen minus Ergebnis mit dem unteren davon bilden.

Dieser Text zum Thema Integralrechnung (Eine Beispielaufgabe zur Integralrechnung) wurde von Dirk Kipper angefertigt. Er darf ohne meine schriftliche Genehmigung weder vervielfältigt noch in irgendeiner anderen Form vertrieben werden. Auch ein Abdruck, selbst auszugsweise ist nur mit meiner vorherigen schriftlichen Genehmigung gestattet.

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper