Exponentialfunktionen

Die Mathematik bezeichnet mal als Exponentialfunktion eine Funktion, die dem folgenden allgemeinen Muster folgt. Sie haben bei der Berechnung von Wachstums- und Zunahmeprozessen sowie bei Zerfallsvorgängen eine große Bedeutung.

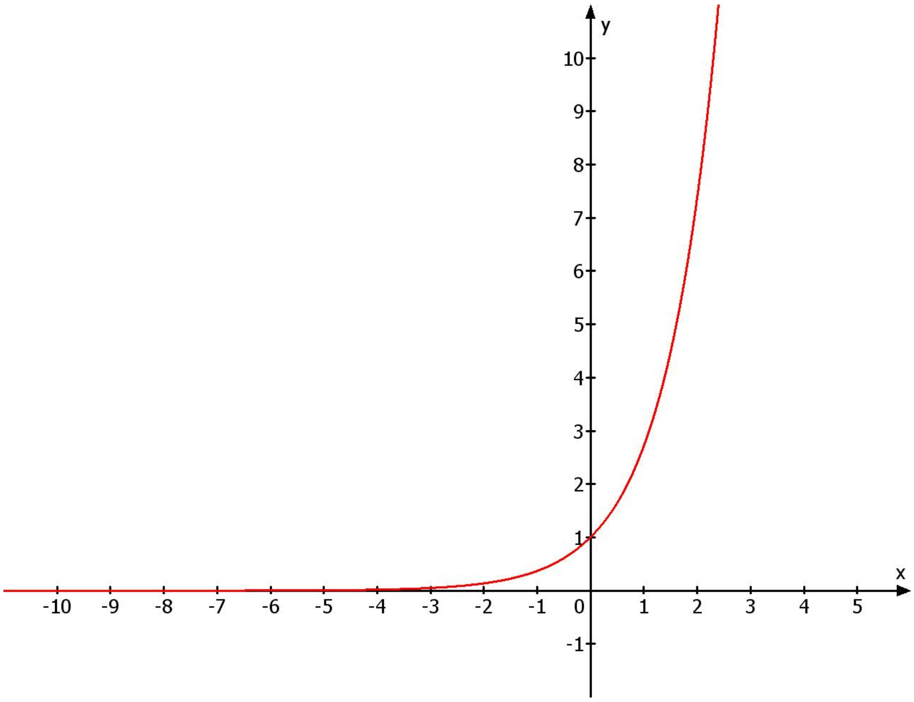
$\boxed{f_{(x)} = c * a^x}$ $\qquad a \in \mathbb{R}^+$; $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Der Parameter a wird Basis der Exponentialfunktion genannt und Faktor c ist lediglich eine Variable die zusätzlich auftreten kann.

$f_{(x)} = c * a^x$ $\qquad a \in \mathbb{R}^+$; $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_{(x)} =$ Variable a * Basis der Exponentialfunktion $^{\text{Exponent}}$

Im Gegensatz zu den Potenzfunktionen (bei denen die Basis die Variable enthält) befindet sich bei den Exponentialfunktionen die Variable im Exponenten. Bei der Bestimmung einer Exponentialfunktion wird darum meistens auch der Exponent gesucht. Manchmal aber auch die Variable bzw. die Basis der Exponentialfunktion.



Grafische Darstellung der Exponentialfunktion f(x) = exp(1)^x

Exponentialfunktionen

Zusammenfassend lassen sich folgende allgemeine Aussagen festhalten die bei Exponentialfunktionen Gültigkeit haben.

Exponentialfunktionen haben keine Symmetrie
Exponentialfunktionen haben keine Null-, Extrem- und Wendestellen
Jede Exponentialfunktion geht durch den Punkt P(0IC)

Die allgemeine Form $f(x) = c * a^x$ ist eine Gleichung mit 2 Unbekannten. Zur Lösung dieses Gleichungssystems braucht es daher auch 2 Gleichungen. Die Lösung kann dann wie bei einem Gleichungssystem mit 2 Unbekannten erfolgen.

Beispiel Zunahme (Wachstum):
Eine Bakterienkultur mit einem Anfangsbestand von 200 Bakterien wächst 60% pro Tag. Wann existieren 1000 Bakterien ?

Lösung:
Die grundlegende Exponentialfunktion ist zunächst gesucht, damit am Ende die Unbekannte x berechnet werden kann.

$$f_{(x)} = c * a^x$$

$f_{(x)}$ = Startwert (c) * Wachstumsfaktor (a) $^{\text{Anzahl der Zyklen (Tage)}}$

Startwert c = 200, da 200 Bakterien am Anfang existieren
Wachstumsfaktor a = 1,6, da 60 % Zunahme besteht (100% + 60% = 160% -> 1,6)
$f_{(x)}$ = 1000, da 1000 Bakterien am Ende existieren sollen

$1000 = 200 * 1{,}6^x$ | Gleichung nach x umstellen

$\frac{1000}{200} = 1{,}6^x$ | Logarithmieren

$\log\left(\frac{1000}{200}\right) = \log 1{,}6 * x$ | / log 1,6

$$x = \frac{\log(5)}{\log(1{,}6)} = 3{,}42$$

Die 200 Bakterien haben sich nach 3,42 Tagen auf 1000 Bakterien vermehrt.

Exponentialfunktionen

Beispiel Abnahme (Zerfall):
Ein Strahlungsniveau fällt innerhalb eines Tages von anfangs 100% auf 93,3% ab. Wie groß ist die Halbwertszeit und wie lautet die Zerfallsfunktion ?

Lösung:
Die grundlegende Exponentialfunktion ist zunächst gesucht, damit am Ende die Unbekannte x berechnet werden kann.

$f_{(x)} = c * a^x$

$f_{(x)}$ = Startwert (c) * Abnahmefaktor (a) $^{\text{Anzahl der Zyklen (Tage)}}$

Startwert c = 1, da 100% Strahlung am Anfang existiert
Abnahmefaktor a = 0,93, die Strahlung ist nach einem Tag auf 93% gefallen
$f_{(x)}$ = 0,5 da nach der Halbwertszeit, also einem Abfall von 100% auf 50% gefragt ist

$f(x) = 100\% * 0{,}93^{x}$

$f(x) = 1 * 0{,}93^x$

$f(x) = 0{,}93^x$ | Allgemeine Gleichung

$0{,}5 = 0{,}93^x$ | Gleichung nach x umstellen

$\log(0{,}5) = \log 0{,}93 * x$ | Logarithmieren

$x = \log\left(\frac{0{,}5}{0{,}93}\right) = 9{,}994$

Die Strahlung ist nach 10 Tagen auf 50% gesunken. Die Halbwertszeit beträgt demnach ca. 10 Tage !

Exponentialfunktionen

Wichtiges zu diesem Thema:

Halbwertszeit $\boxed{x = \frac{\log 0{,}5}{\log a}}$ | Halbwertszeit -> log 0,5

Verdopplung $\boxed{x = \frac{\log 2}{\log a}}$ | Verdopplung -> log 2

Logarithmieren $12^x = 3 \Rightarrow x \cdot \log(12) = \log(3) \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 12}$

Mail: dirkkipper777@hotmail.com
Web: http://www.dirkkipper.de/

Dirk Kipper